

2022 年高三年级一轮复习阶段性成果调研卷（新高考地区）

数 学 试 卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 定义：当 $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ 时， $P(x, y)$ 成为“格点”，则集合 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$ 对应的图形有（ ）格点

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

2. 从 2020 年开始，国家逐步推行全新高考制度，新高考不分文理科，采用“3+3”模式，其中语文、数学、外语三科为必考科目，另外考生还要依据想考取的高校及专业的要求，结合自己的兴趣爱好等因素，在政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 门科目中自选 3 门参加考试，则甲、乙两人在六门自选科目中至少有两科相同的选法的种数为（ ）

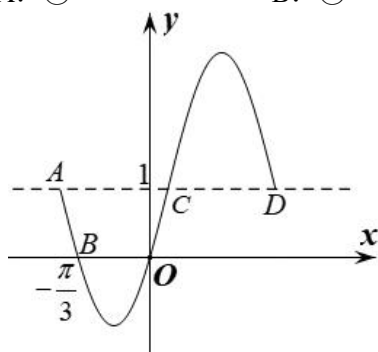
- A. 180 B. 200 C. 220 D. 360

3. 已知 $\omega > 0$ 且为整数，且 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1$ 的图像如图所示， A, C, D 是 $f(x)$ 的图像与 $y=1$ 相邻的三个交点，与 x 轴交于相邻的两个交点 O, B ，若在区间 (a, b) 上， $f(x)$ 有 2020 个零点，则 $b-a$ 的最大值为（ ）

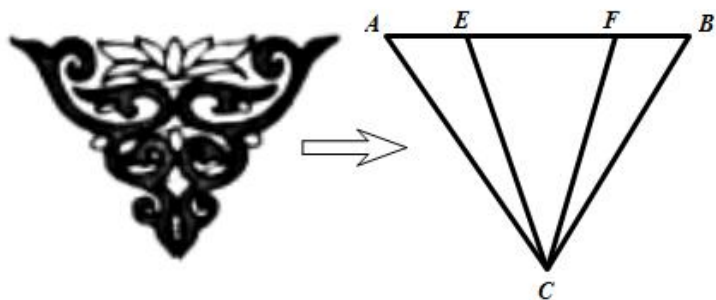
- A. 2020π B. $\frac{3034\pi}{3}$ C. $\frac{3032\pi}{3}$ D. 1012π

4. 已知：① 函数 $f(x) = x - \sin x$ 有且仅有一个零点；② 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A > B$ ，则 $\sin A > \sin B$ ；③ 抛物线 $C: y = ax^2$ 的焦点坐标为 $(0, \frac{a}{4})$ ；④ 不等式 $2\ln x \leq x^2 - 1 (x > 0)$ 恒成立，则上面结论错误的序号为（ ）

- A. ① B. ② C. ③ D. ④



第 3 题图



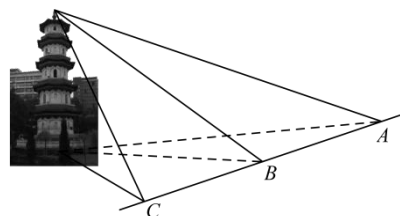
第 5 题图

5. 小华在学习绘画时，对古典装饰图案产生了浓厚的兴趣，拟以矢量图（也称为面向对象的图象或绘图图象，在数学上定义为一系列由线连接的点，是根据几何特性绘制的图形）的模式精细地素描以下古典装饰图案，经过研究，小华发现该图案可以看成是一个边长为 4 的等边三角形 ABC ，如图，上边中间莲花形的两端恰好都是 AB 边的四等分点 (E, F 点)，则 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} =$ ()

- A. 9 B. 16 C. 12 D. 11

6. 鄂州十景之一“二宝塔”中的文星塔位于文星路与南浦路交汇处，至今四百六十多年的历史，该塔为八角五层楼阁式砖木混合结构塔。现在在塔底共线三点 A, B, C 处分别测塔顶的仰角为 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ，且 $AB = BC = \frac{70\sqrt{6}}{9}$ 米，则文星塔高为（ ）

- A. 20 米 B. $\frac{70}{3}$ 米
C. $\frac{80}{3}$ 米 D. 30 米



7. 给出下面四个命题：

- ① 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 在 $(3, 5)$ 内存在零点； ② 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} (x \in \mathbb{R})$ 的最小值是 2；
③ 若 $a < b < 0$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ； ④ 命题的“ $\exists x < 0, x^2 - x - 2 < 0$ ”否定是“ $\forall x \geq 0, x^2 - x - 2 \geq 0$ ”

其中真命题个数是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 存在 $a, b \in \mathbf{R}$, 使 $x \in [-1, 2]$ 时恒有 $(|x+a|-b)(x^2+x-2) \geq 0$, 则 ()

- A. $a \leq 1$ B. $a \geq 1$ C. $b \leq 1$ D. $b \geq 1$

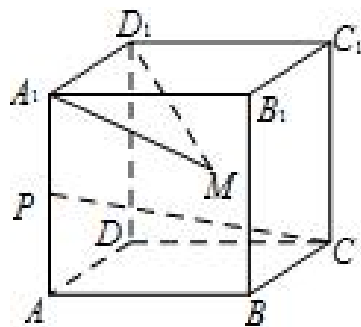
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$, $g(x) = \lg(\sqrt{x^2+1}-x)$, 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 为偶函数
B. 函数 $g(x)$ 为奇函数
C. 函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 0
D. 设 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则 $F(2a) + F(-1-a) < 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, 点 P 是 AA_1 的中点, 点 M 是侧面 AA_1B_1B 内的动点, 且满足 $D_1M \perp CP$, 下列选项正确的是 ()

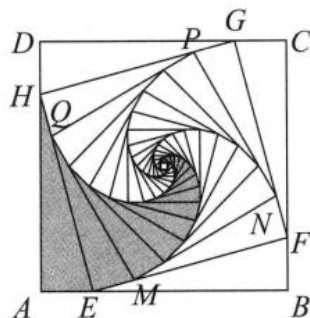
- A. 动点 M 轨迹的长度是 $2\sqrt{5}$
B. 三角形 A_1D_1M 在正方体内运动形成几何体的体积是 $\frac{32}{3}$
C. 直线 D_1M 与 BC 所成的角为 α , 则 $\tan \alpha$ 的最小值是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
D. 存在某个位置 M , 使得直线 BD_1 与平面 A_1D_1M 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$



11. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的动直线 l 与 E 相交于 A, B 两点, 则 ()

- A. 曲线 E 与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{6} = 1$ 有公共焦点 B. 曲线 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 渐近线方程为 $x \pm 2y = 0$.
C. $|AB|$ 的最小值为 1 D. 满足 $|AB| = 4$ 的直线 l 有且仅有 4 条

12. 数学中有各式各样富含诗意的曲线, 螺旋线就是其中比较特别的一类. 螺旋线这个名词来源于希腊文, 它的原意是“旋卷”或“缠卷”. 小明对螺旋线有着浓厚的兴趣, 连接嵌套的各个正方形的顶点就得到了近似于螺旋线的美丽图案, 其具体作法是: 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, 作它的内接正方形 $EFGH$, 且使得 $\angle BEF = 15^\circ$; 再作正方形 $EFGH$ 的内接正方形 $MNPQ$, 且使得 $\angle FMN = 15^\circ$; 类似地, 依次进行下去, 就形成了阴影部分的图案, 如图所示. 设第 n 个正方形的边长为 a_n (其中第 1 个正方形 $ABCD$ 的边长为 $a_1 = AB$, 第 2 个正方形 $EFGH$ 的边长为 $a_2 = EF$, ...), 第 n 个直角三角形(阴影部分)的面积为 S_n (其中第 1 个直角三角形 AEH 的面积为 S_1 , 第 2 个直角三角形 EQM 的面积为 S_2 , ...), 则 ()



- A. 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列 B. $S_1 = \frac{1}{12}$
C. 数列 $\{S_n\}$ 是公比为 $\frac{4}{9}$ 的等比数列 D. 数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 $T_n < \frac{1}{4}$

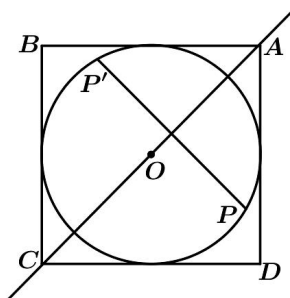
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图所示的后母戊鼎是一件非常有名的青铜重器, 是商王武丁之子祭祀母亲戊所铸, 现藏于国家博物馆. 鼎身与四足为整体铸造, 鼎耳则是在鼎身铸成之后再浇铸而成, 鼎身大致为长方体形状的容器, 长为 110cm, 宽为 79cm, 壁厚 6cm. 若一堆祭祀物品在该容器内燃烧后形成的灰平铺且铺满容器底部, 灰的高度为 0.5cm, 则灰的体积为 _____ cm^3 .

14. 如图所示, 半径为 1 的圆 O 内接于正方形 $ABCD$, 点 P 是圆 O 上的一个动点, 点 P' 与 P 关于直线 AC 成轴对称, 若 $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OP'}$, 则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的取值范围是 _____.



第 13 题图



第 14 题图

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax - a + 2, & x \geq 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$ 和 $g(x) = x^2 + 1 - 2a$, 有下列四个结论:

- ①当 $a=1$ 时, 若函数 $y = f(x) - m$ 有 3 个零点, 则 $0 < m \leq 1$; ②当 $1 < a \leq 2$ 时, 函数 $y = f(g(x))$ 有 6 个零点;
③当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = g(f(x))$ 的所有零点之和为 -1 ; ④当 $a=1$ 时, 函数 $y = f(f(x))$ 有 3 个零点;

其中正确结论的序号为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$, G 为其重心, 直线 DE 经过点 G , 且与射线 AB 、 AC 分别交于 D 、 E 两点, 记 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CEG$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 则当 $\frac{S_1}{S_2}$ 取得最小值时, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 与数列 $\{a_n\}$ 满足 $b_n = 3^{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$.

- (1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;
(2) 若 $b_5 = 3$, 且数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和 $S_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(3) 在 (2) 的条件下, 求 $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 且向量 $\vec{m} = (\sin A, \sin B)$, $\vec{n} = (\cos B, \cos A)$, 满足 $\vec{m} \cdot \vec{n} = \sin 2C$.

- (1) 求角 C 的大小;
(2) 若 $\sin A, \sin C, \sin B$ 成等差数列, 且 $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 18$, 求 c 边的长.

19. 一疫苗生产单位通过验血方法检验某种疫苗产生抗体情况, 需要检验血液是否有抗体现有 $n (n \in \mathbb{N}^*)$ 份血液样本每份样本取到的可能性均等有以下两种检验方式: (1) 逐份检验, 则需要检验 n 次; (2) 混合检验将其中 $k (k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k \geq 2)$ 份血液样本分别取样混合在一起检验若检验结果无抗体, 则这 k 份的血液全无抗体, 因而这 k 份血液样本只需检验一次就够了, 若检验结果有抗体, 为了明确这 k 份血液究竟哪几份有抗体就要对这 k 份再逐份检验, 此时这 k 份血液的检验总次数为 $k+1$ 次假设在接受检验的血液样本中, 每份样本的检验结果有无抗体都是相互独立的, 且每份样本有抗体的概率均为 $p (0 < p < 1)$.

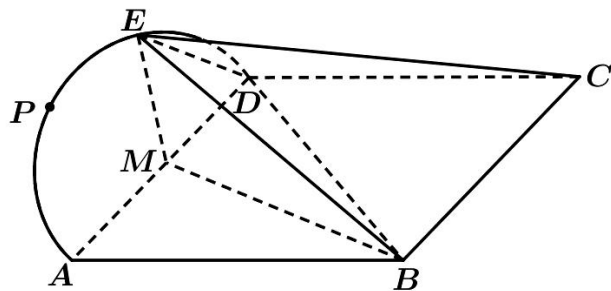
(1) 假设有 5 份血液样本, 其中只有 2 份血液样本有抗体, 若采用逐份检验方式, 求恰好经过 3 次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率;

(2) 现取其中 $k (k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k \geq 2)$ 份血液样本, 记采用逐份检验方式, 样本需要检验的总次数为 ξ_1 , 采用混合检验方式样本需要检验的总次数为 ξ_2 . 若 $E(\xi_1) = E(\xi_2)$, 求 p 关于 k 的函数关系式 $p = f(k)$, 并证明 $p < 1 - e^{-\frac{1}{e}}$.

20. 如图, E 是以菱形 $ABCD$ 的边 AD 为直径的半圆弧上一点, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = BE = 2DE = 2$, 且 M 为 AD 的中点.

(1) 求证: 平面 $BEM \perp$ 平面 DEM ;

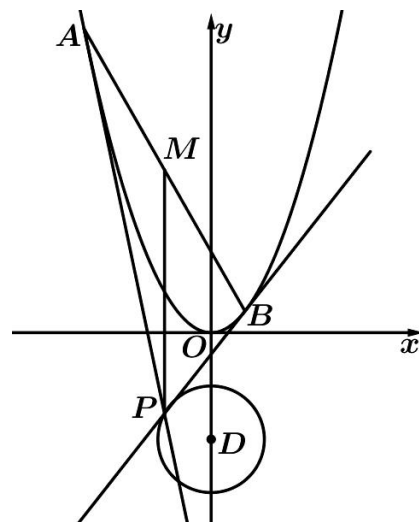
(2) 设 P 为 $\overline{AE}$ 上任意一点, 求二面角 $B-PD-C$ 的余弦值取值范围.



21. 如图, 点 P 在抛物线 $C: y = x^2$ 外, 过 P 作抛物线 C 的两切线, 设两切点分别为 $A(x_1, x_1^2)$, $B(x_2, x_2^2)$, 记线段 AB 的中点为 M .

(1) 求切线 PA , PB 的方程;

(2) 设点 P 为圆 $D: x^2 + (y+2)^2 = 1$ 上的点, 当 $\frac{|AB|}{|PM|}$ 取最大值时, 求点 P 的纵坐标.



22. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x (a \neq 0)$, $g(x) = e^x + bx^2 (b \in \mathbf{R})$.

(1) 记 $h(x) = f(x) + x^2$, 试讨论函数 $h(x)$ 的单调性;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线都过点 $(0, 1)$. 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) + \frac{g(x) - 1}{x} \geq e - 1$

